

Vorlesung: Bildgebende Verfahren in der Medizin I

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
2. Prüfer: Carmen Martínez Antón, M.Sc.; Lorena Krames, M.Sc.

Klausur

7, März 2022
Beginn: 8:00 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein.

Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare. Bei Formeln müssen die verwendeten Größen angegeben werden, bei Diagrammen müssen die Achsen beschriftet werden.

Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Gesamt
Punkte:	7	17	7	11	4	8	12	7	5	4	4	86
erreicht:												

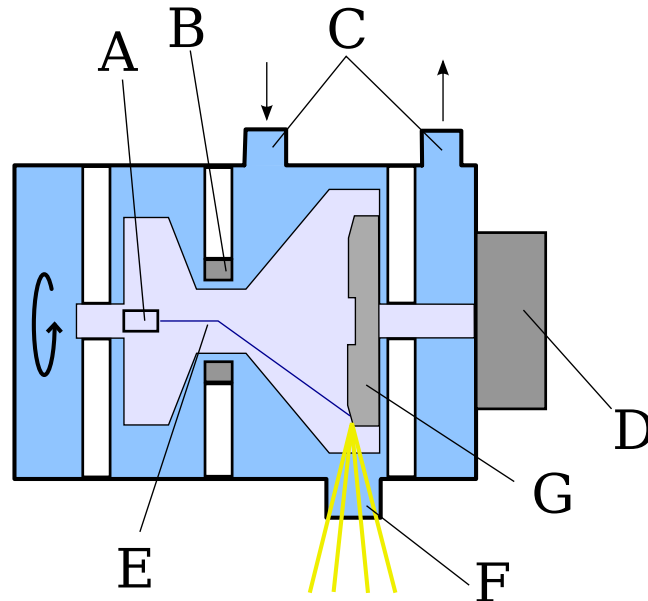
Note: _____

Röntgentechnik

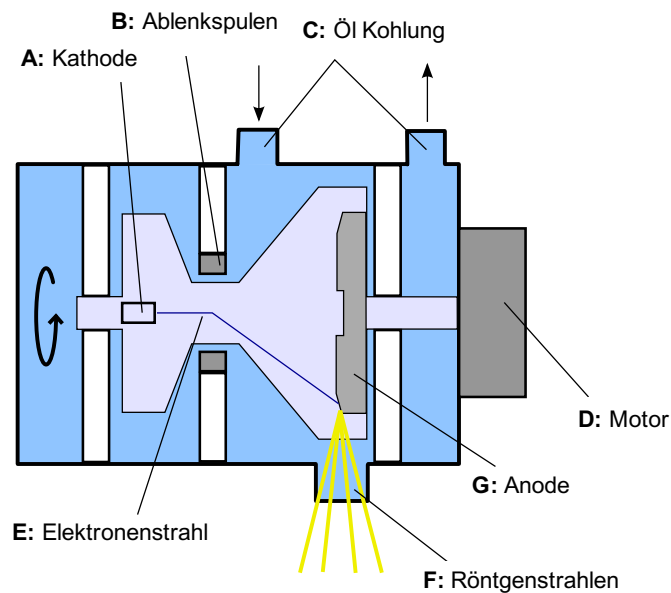
Frage 1

(7 Punkte)

Die klassische Quelle für Röntgenstrahlung in der Medizin ist die Drehanoden-Röhre. Nennen Sie die Komponenten [A-G] einer Röntgenröhre mit Drehanode und rotierendem Vakuumgefäß (Drehkolben-Röhre).



Lösung:

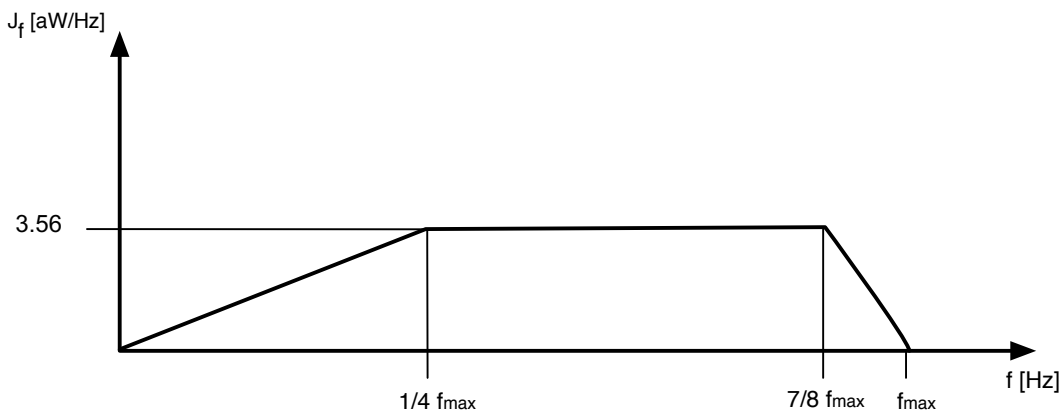


Frage 2**(17 Punkte)**

Von Ihnen wird verlangt, eine Röntgenquelle für medizinisch-diagnostische Zwecke zu entwerfen.

- (a) Welche Anforderungen werden an die Röntgenquellen gestellt und warum? (5 Punkte)
- (b) Welche technischen Quellen für Röntgenstrahlung gibt es? Wählen Sie eine Röntgenquelle für den genannten Zweck und begründen Sie Ihre Wahl. (4 Punkte)
- Geben Sie auch an, welchen Typ der ausgewählten Quelle Sie bevorzugen.
- (c) Welche Kriterien sind für ein gutes Anodenmaterial wichtig? Geben Sie ein Qualitätsmaß in Form einer Formel an. (2 Punkte)
- (d) Die Abbildung zeigt die spektrale Leistungsdichte einer Anordnung. Nehmen Sie an, dass es sich hierbei um eine Röntgenröhre handelt die bei einer Anodenspannung von $U_A = 100 \text{ kV}$ und einem Anodenstrom von $I_A = 100 \text{ mA}$ betrieben wird. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad? (6 Punkte)

Hinweis: $h := 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $e := 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und das kleine a in der Einheit aW in Abbildung heißt Atto und entspricht 10^{-18} .

**Lösung:**

- (a) • **Hohe Leistung.** Mit hoher Leistung können die Belichtungszeiten kurz gehalten werden, denn Aufnahmen mit kürzeren Belichtungszeiten sind weniger verwackelt. Dazu ermöglichen sie die Aufnahme von bewegten Organen (Herz). (5 Punkte)
- **Kleiner Fokus.** Ein kleiner Fokus reduziert die Halbschatten-Effekte und ermöglicht ein schärferes Bild.
- **Einstellbare Quantenenergie.** Da der Kontrast zwischen verschiedenen Gewebearten nur in bestimmten Energiebereichen optimal ist, muss die Quantenenergie einstellbar sein.
- **Kostengünstige Herstellung.**
- **Wenig Wartung und lange Lebensdauer.**
- (b) Die technischen Quellen sind Synchrotron, radioaktive Isotope, Röntgenröhre. (4 Punkte)
- Die Drehanode.** Bei ihr wird die Hitze über den gesamten Ring verteilt. Sie kann daher mit höherer Leistung betrieben werden wie die Festanodenröntgenröhre. Der Elektronenbeschleuniger ist zu teuer und ein Isotop als Röntgenquelle lässt keine hohe Leistung mit kleinem Fokus zu. Der Einsatz einer Festanode ist nur vorteilhaft, wenn über lange Zeit niedrige Röntgenleistungen gefordert sind. In der medizinischen Diagnostik sind aber hohe Leistungen mit kurzen Zeitintervallen gefragt.

(c)

$$\text{Qualitätsmaß}_D = Z \cdot T_{max} \cdot \sqrt{\lambda \rho c} \quad (1)$$

Auch akzeptiert wird:

$$\text{Qualitätsmaß}_D = Z \cdot T_{max} \cdot \lambda \quad (2)$$

Mit:

- Z : Ordnungszahl
- T_{max} : maximal zulässige Temperatur
- λ : Wärmeleitfähigkeit
- ρ : Dichte
- c : spezifische Wärmekapazität

(d) Der Wirkungsgrad ist definiert als:

$$\eta = \frac{J_{ges}}{I_A \cdot U_A}.$$

Und J_{ges} lässt sich mit

$$J_{ges} = \int_0^{f_{max}} J_f df$$

ermitteln. Benötigt wird also noch f_{max} . Aus

$$E_{Photo} = h \cdot f \quad \text{und} \quad E_{Kin} = e \cdot U_A$$

kann

$$f_{max} = \frac{e \cdot U_A}{h} = 2.418 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$$

berechnet werden.

Die Fläche unter der Kurve lässt sich auf Grund der einfachen Geometrie der Teilstücke berechnen.

$$T1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{2}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

$$T2 = \frac{5}{8} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{10}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

$$T3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} f_{max} \cdot J_{f_{max}} = \frac{1}{16} f_{max} J_{f_{max}}$$

mit $J_{f_{max}} = 3.56 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$ erhält man

$$J_{ges} = \frac{13}{16} \cdot 2.418 \cdot 10^{19} \text{ Hz} \cdot 3.56 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz} = 69.933 \text{ W}$$

und

$$\eta = 0.069933\%.$$

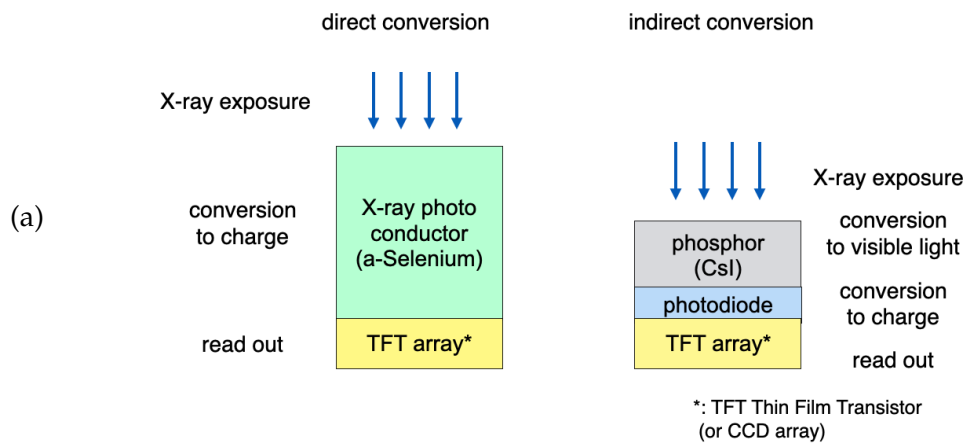
(2 Punkte)

(6 Punkte)

Frage 3**(7 Punkte)**

Eine Alternative zum Röntgenfilm sind die digitalen flachen Röntgendetektoren.

- (a) Skizzieren Sie ein Detektorelement mit "direct conversion" und mit "indirect conversion". (5 Punkte)
- (b) Welche zwei Methoden zum Auslesen der Detektormatrix werden verwendet? (2 Punkte)

Lösung:

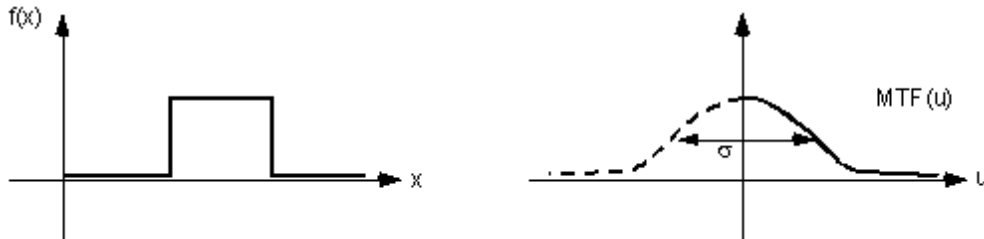
- (b)
- Active Matrix Read out mit Dünnschicht-Transistoren (TFT)
 - Charged Coupled Devices (CCD)

Bildverarbeitung

Frage 4

(11 Punkte)

Gegeben ist ein schwarzer Balken vor weißem Hintergrund als Eingangsbild eines abbildenden Systems und die MTF des abbildenden Systems (Gaußprofil mit der Standardabweichung σ).



- (a) Beschreiben Sie einen Weg, um das Ausgangsbild zu berechnen (nicht explizit lösen). (2 Punkte)
- (b) Gibt es einen digitalen Filter, der das Eingangsbild in gleicher Weise in das Ausgangsbild transformiert? Wie sieht die Filtermaske aus (5x5 Matrix)? (4 Punkte)
- (c) Bei diesem handelt es sich um einen sog. „weichen“ Tiefpassfilter. Wie sieht im Gegensatz dazu ein „harter“ Tiefpassfilter aus? Wie wirken sich die Eigenschaften des „harten“ Tiefpassfilters im Ortsraum aus? (3 Punkte)
- (d) Skizzieren Sie qualitativ das Ausgangsbild für zwei verschiedene Werte von σ im Ortsraum. (Hinweis: Beachten Sie, dass σ bei der MTF des abbildenden Systems variiert werden soll, siehe Abbildung.) (2 Punkte)

Lösung:

- (a) **Weg 1:** Das Original $f(x)$ wird fouriertransformiert:

$$f(x) \longleftrightarrow F(u)$$

$F(u)$ wird mit der $MTF(u)$ multipliziert. Das Ergebnis wird zurücktransformiert.

$$g(x) \longleftrightarrow G(u)$$

$$G(u) = F(u) \cdot MTF(u)$$

(Eigentlich: Fourier-Reihenentwicklung, da die MTF nur der Absolutbetrag der komplexen Übertragungsfunktion ist.)

Weg 2: Die MTF wird invers fouriertransformiert und liefert die Impulsantwort $h(x)$. Das Original $f(x)$ wird mit der Impulsantwort $h(x)$ gefaltet:

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cdot h(x - x') dx'$$

- (b) Die Faltung mit der zur MTF gehörenden Impulsantwort kann durch eine (endliche) Filtermaske approximiert werden. Da die Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion wieder eine Gauß-Funktion ist, ergibt sich die Filtermaske einer Gauß-Funktion z.B.:

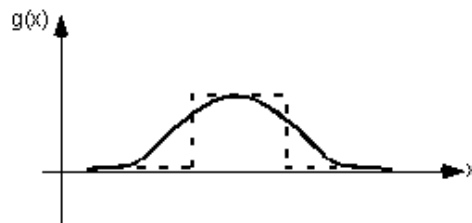
1	1	2	1	1
1	2	4	2	1
2	4	8	4	2
1	2	4	2	1
1	1	2	1	1

- (c) Ein „harter“ Tiefpass hat die Form einer Rechteckfunktion. Unterhalb einer Grenzfrequenz werden alle Frequenzanteile mit 1 multipliziert, oberhalb der Grenzfrequenz werden alle Frequenzanteile gelöscht (Verhalten eines unvollkommenen abbildenden Systems). Rechteckförmige Filter führen im Ortsraum zu „Echos“ an scharfen Kanten, da die Multiplikation mit dem Rechteck im Frequenzraum einer Faltung mit der si-Funktion im Ortsraum entspricht. Der periodische Verlauf dieser Funktion führt zu den „Echos“.

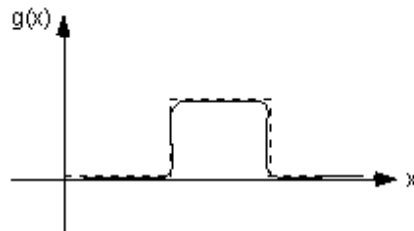
Rechteckfilter:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

- (d) Für ein kleines σ im Frequenzraum ergibt sich eine breite „Verschmierung“ im Ortsraum:



Für ein großes σ im Frequenzraum ergibt sich eine kleine „Verschmierung“ im Ortsraum:

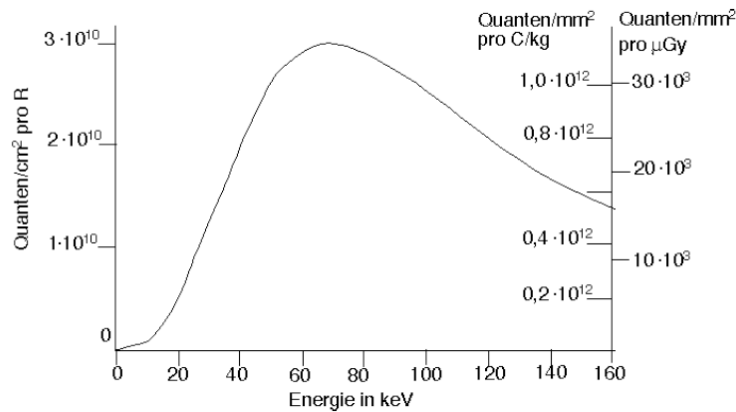


Biologische Wirkung ionisierender Strahlung

Frage 5

(4 Punkte)

Bestimmen Sie basierend auf den unten angegebenen Daten das Pixelrauschen (σ in %) in einem Bild mit der Pixelgröße $0,5 \text{ mm} \cdot 0,5 \text{ mm}$ bei einer Dosis von 1 mGy (Energie = 100 keV) und einer DQE von $0,7$.



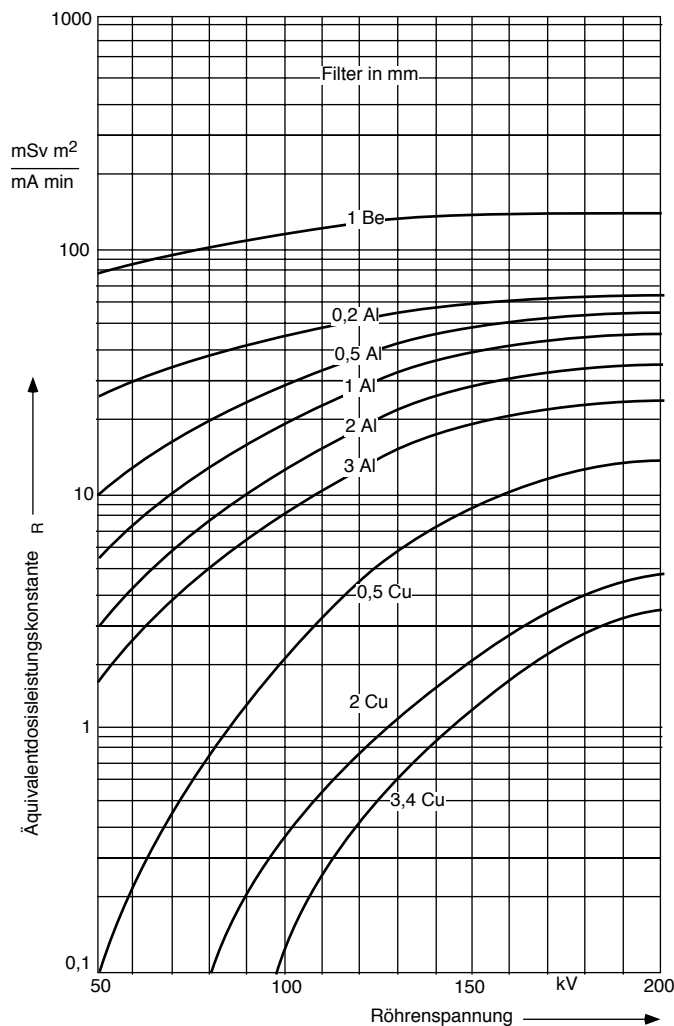
Lösung:

- Die Pixelgröße $0,5 \text{ mm} \cdot 0,5 \text{ mm}$ entspricht $0,25 \text{ mm}^2$.
- 1 mGy entspricht bei 100 keV : $30 \cdot 10^6$ Quanten/ mm^2 (aus dem Diagramm).
- $30 \cdot 10^6$ Quanten/ $\text{mm}^2 \cdot 0,25 \text{ mm}^2/\text{Pixel} = 7,5 \cdot 10^6$ Quanten pro Pixel.
- Mit einer DQE von $0,7$ ergeben sich $5,25 \cdot 10^6$ nachgewiesene Quanten pro Pixel.
- Standardabweichung bei Poissonverteilung als Wurzel des Erwartungswerts:
 $\sigma = \sqrt{5,25 \cdot 10^6} \text{ Quanten} \approx 2291 \text{ Quanten}$.
- Daraus folgt für das relative Pixelrauschen:
 $\frac{2291 \text{ Quanten}}{5,25 \cdot 10^6 \text{ Quanten}} = 3,6 \cdot 10^{-4} = 0,044\%$

Frage 6**(8 Punkte)**

Ein Röntgenröhre mit einem 0,5 mm dicken Aluminium-Filter wird mit $U_a = 80 \text{ kV}$ und $I_a = 15 \text{ mA}$ betrieben. Ihre Aufgabe ist es nun für dieses Gerät eine Risikoabschätzung abzugeben. Sie haben dazu eine Ionisationskammer in den Strahlengang eingebracht.

- (a) Geben Sie die allgemeine Formel für die Energie- und Äquivalenzdosis an. In welcher Einheit werden Sie gemessen? (2 Punkte)
- (b) Erklären Sie, warum auch die Ionendosis verwendet wird. (1 Punkt)
- (c) Wie groß ist die resultierende Äquivalentdosis, wenn Sie aus ihrer Ionisationskammer eine Ionendosis $J = 6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$ ablesen und der gemittelte Umrechnungsfaktor Ihnen mit $f = 35 \frac{\text{Gy}}{\text{As/kg}}$ gegeben ist? (1 Punkt)
- (d) Wie viele Sekunden müsste eine Person in 0,4 m Entfernung zur Röhre stehen um die Äquivalentdosis aus Aufgabenteil (c) erfahren zu haben? (3 Punkte)
- Berücksichtigen Sie bei Ihrer Lösung folgende Abbildung:



- (e) Warum erhält man bei einer Röntgenaufnahme auch für Organe, die sich nicht im Röntgen-Strahlengang befinden eine merkbare Energiedosis? (1 Punkt)

Lösung:(a) • **Energiedosis:**

$$D = \frac{\text{In der Probe deponierte Energie}}{\text{Masse der Probe}} \quad (3)$$

$$\text{Einheit: } \frac{J}{kg} = Gy; (\text{Gray}) \quad (4)$$

• **Äquivalentdosis:**

$$H = q \cdot D \quad (5)$$

$$\text{Einheit: } \frac{J}{kg} = Sv; (\text{Sievert}) \quad (6)$$

mit q : Strahlenwichtungsfaktor.

Für Röntgenstrahlung ist $q = 1$.

(b) Die Ionendosis wird verwendet, da ein direkter Nachweis der deponierten Energie schwierig zu realisieren ist. Mithilfe einer Ionisationskammer und einer Proportionalitätskonstante kann die Äquivalentdosis abgeschätzt werden.

(c) Äquivalentdosisleistung H :

$$H = f \cdot J = 21 \text{ mSv}$$

(d) Belichtungszeit t :

Aus der Abbildung für die Äquivalenzdosisleistungskonstante bezogen auf I_A kann man ablesen:

$$\Gamma_R = \frac{H \cdot d^2}{I_A \cdot t} = 20 \frac{\text{mSv m}^2}{\text{mA min}} \approx 0,333 \frac{\text{mSv m}^2}{\text{mA s}}$$

Daraus folgt für die Belichtungszeit t :

$$t = \frac{H \cdot d^2}{I_A \cdot \Gamma_R} = 0,673 \text{ s}$$

(e) In dem Bereich des Körpers, der direkt durchstrahlt wird entsteht viel Streustrahlung. Diese breitet sich nach allen Seiten aus und kann in anderen Organen absorbiert werden.

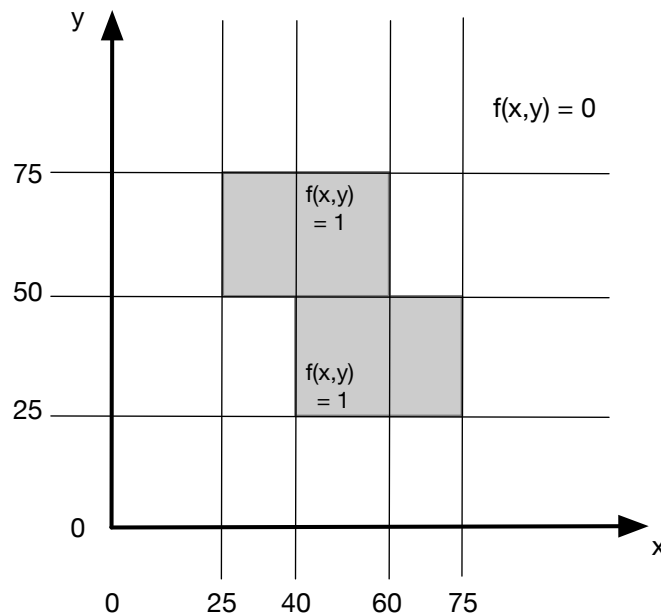
Computer Thomographie (CT)

Frage 7

(12 Punkte)

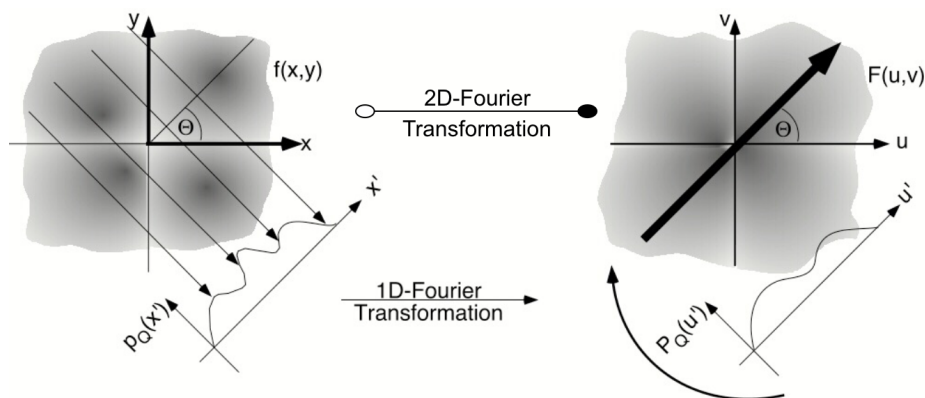
- (a) Formulieren Sie das Fourier-Scheiben-Theorem am Beispiel einer Projektion zum Winkel $\Theta = 45^\circ$ (Erklärung und Skizze). (4 Punkte)
- (b) Wie lassen sich mit Hilfe des Fourier-Scheiben-Theorems Schnittbilder des Röntgenschwächungskoeffizienten rekonstruieren? (4 Punkte)
- (c) Die folgende Grafik zeigt den Querschnitt eines Bildes mit dem Wert $f(x,y) = 1$ innerhalb der Rechtecke und $f(x,y) = 0$ außerhalb. Zeichnen Sie das Ergebnis einer Aufnahme $p(0^\circ, s)$ für $s = [0, 100]$ in ein Koordinatensystem ein. Skizzieren Sie außerdem noch die Projektion zum Projektionswinkel $\Theta = 45^\circ$. (4 Punkte)

Hinweis: Achten Sie darauf die korrekten Werte an den jeweiligen Achsen für die Projektion $p(0^\circ, s)$ anzugeben. Für $p(45^\circ, s)$ kann auf die Beschriftung der y-Achsen mit korrekten Zahlenwerten verzichtet werden. Achten Sie darauf, dass der Rand der Rechtecke ebenfalls den Funktionswert 1 besitzt.

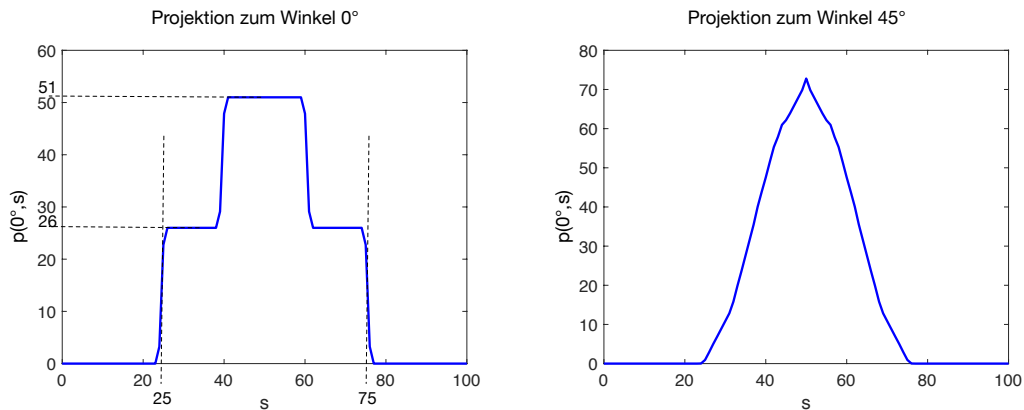


Lösung:

- (a) Sei $f(x, y)$ gegeben und $F(u, v)$ deren 2D-Fouriertransformierte. Sei $p_\Theta(s)$ eine Projektion von $f(x, y)$ bei $\Theta = 45^\circ$. Dann beschreibt die 1D-Fouriertransformierte von $p_\Theta(s)$, $P_\Theta(w)$, die Werte von $F(u, v)$ auf der ersten Winkelhalbierenden.



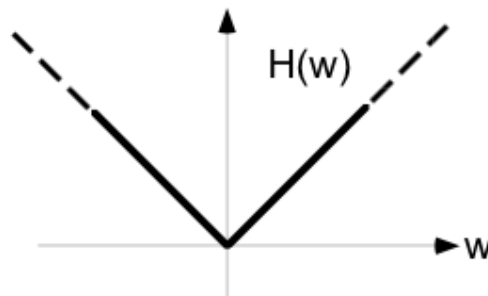
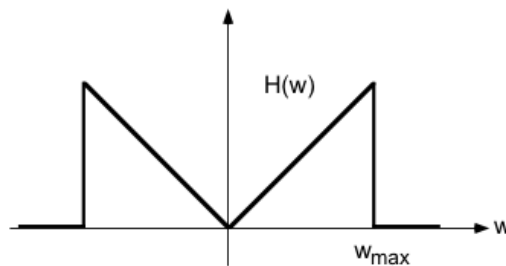
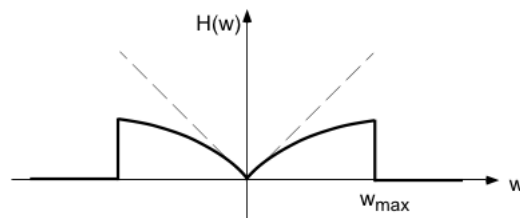
- (b) Es werden viele Projektionen $p_{\Theta}(s)$ unter verschiedenen Winkeln aufgenommen. Jede Projektion wird 1D-fouriertransformiert $P_{\Theta}(w)$. Die Ergebnisse werden auf Radialstrahlen zum Winkel Θ in die $F(u, v)$ -Ebene eingetragen. Hierbei muss auf ein kartesisches Koordinatensystem interpoliert werden. Das Bild $f(x, y)$ erhält man aus der inversen Fouriertransformation von $F(u, v)$.
- (c) Die folgende Abbildung zeigt die gesuchte Projektion $p(0^{\circ}, s)$ und $p(45^{\circ}, s)$:



Hinweise zur Lösung: Für die Projektion bei einem Winkel von $\Theta = 0^{\circ}$ sind die Zahlenwerte für s und $p(0^{\circ}, s)$ in der Abbildung angegeben.

Frage 8**(7 Punkte)**

- (a) Skizzieren Sie im Raum-Frequenzbereich 3 Filterfunktionen für die gefilterte Rückprojektion bei der Computertomographie (eine mathematisch korrekte und zwei in der Praxis verwendete). (3 Punkte)
- (b) Warum wählt man in der Praxis an Stelle der mathematisch richtigen eine der beiden anderen Filterfunktionen? (2 Punkte)
- (c) Worin unterscheiden sich die beiden in der Praxis verwendeten Filterfunktionen? (2 Punkte)

Lösung:(a) **Mathematisch richtig:****Ramachandran-Lakshminarayanan (RL):****Shepp-Logan (SL):**

- (b) Wegen der Bandbegrenzung durch das digitale Abtasten sind Signalanteile größer als w_{max} nicht bekannt. Signalanteile oberhalb von w_{max} Frequenzen enthalten daher ausschließlich Rauschen. Da die mathematisch korrekte Filterfunktion hohe Frequenzen zunehmend verstärkt findet sich praktisch keine Verwendung.

- (c) Ramachandran-Lakshminarayanan (RL) entspricht der mathematisch korrekten Filterfunktion, die mit einem Rechteckfenster der Breite w_{max} multipliziert wurde. Die Filterfunktion von Shepp-Logan (RL) hingegen bedämpft zusätzlich hohe Frequenzen innerhalb des Fensters. Dadurch wird die räumliche Auflösung schlechter aber das hochfrequente Rauschen wird unterdrückt.

Nuklearmedizinische Messtechnik

Frage 9

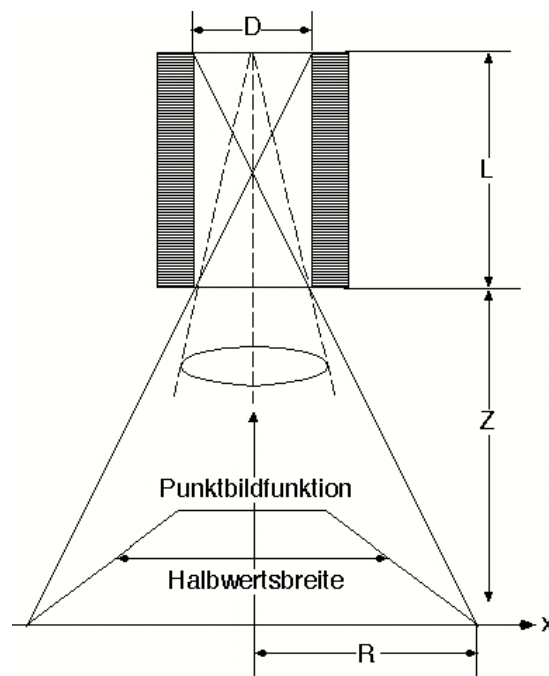
(5 Punkte)

Kollimator-Kenngrößen

- (a) Wie groß ist die Halbwertsbreite der Punktbildfunktion eines Kollimators? Veranschaulichen Sie Ihre Erklärung mit einer Skizze. (3 Punkte)
- (b) Bestimmen Sie den Radius der Punktbildfunktion eines Kollimators in Abhängigkeit von der Entfernung zwischen Kollimator und Gamma-Strahler mit: (2 Punkte)
- $L = 25 \text{ mm}$ Dicke des Kollimators
 - $D = 1 \text{ mm}$ effektiver Durchmesser des Kollimators

Lösung:

- (a) Zur Darstellung der Punktbildfunktion wird ein idealer punktförmiger Gamma-Strahler vor dem Detektor vorbei bewegt und die Zählrate über dem Ort aufgezeichnet. Die resultierende Punktbildfunktion hat an den Rändern einen Halbschattenbereich und in der Mitte ein Plateau, auf dem sich die Zählrate nur wenig ändert. Die Halbwertsbreite ist der Bereich, in dem die Zählrate die Hälfte des Maximums beträgt.



- (b) Der Radius der Punktbildfunktion ergibt sich nach dem Strahlensatz zu:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{D}{L} \cdot \left(Z + \frac{L}{2} \right) = \frac{D}{L} \cdot Z + \frac{D}{2} = \frac{1 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} \cdot Z + \frac{1 \text{ mm}}{2} \\
 &= 0,04 \cdot Z + 0,5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

(Eine Lösung ohne $\frac{L}{2}$ wird auch anerkannt.)

$$R = \frac{D}{L} \cdot Z = \frac{D}{L} \cdot Z = \frac{1 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} \cdot Z = 0,04 \cdot Z$$

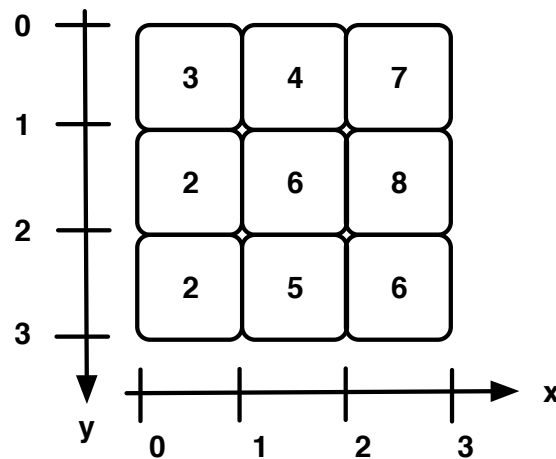
Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT) und Positronen Emissions Tomographie (PET)

Frage 10

(4 Punkte)

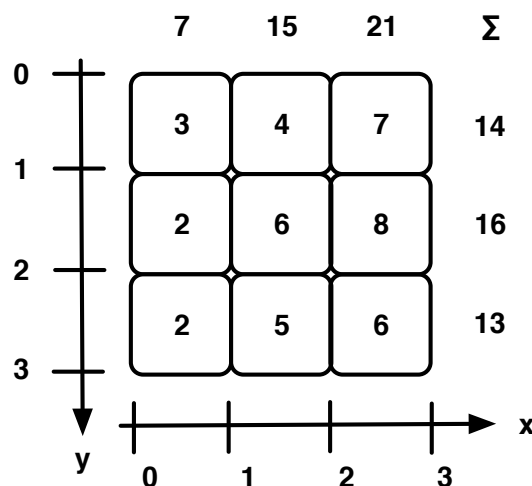
- (a) Wie wird der Einfallsort des Gammaquants bei einer Anger-Kamera ermittelt? Beschreiben Sie das Verfahren allgemein und bestimmen Sie dann den Einfallsort im Beispiel. Die gegebenen Werte entsprechen den Messwerten der 9 Photomultiplier, die sich an den Koordinaten $(x|y)$ befinden.

(4 Punkte)



Lösung:

- (a) Der Einfallsort des Gamma-Quants wird als "Schwerpunkt" aus allen Photomultiplier-Signalen ermittelt. Dazu werden die Spalten und Reihen aufsummiert und mit der Koordinate des Mittelpunkts des Photomultipliers multipliziert. Die gewichtete Summe wird normiert:



$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 0,5 + 15 \cdot 1,5 + 21 \cdot 2,5}{7 + 15 + 21} = \frac{3,5 + 22,5 + 52,5}{43} = \frac{78,5}{43} \approx 1,83$$

$$\bar{y} = \frac{14 \cdot 0,5 + 16 \cdot 1,5 + 13 \cdot 2,5}{14 + 16 + 13} = \frac{7 + 24 + 32,5}{43} = \frac{63,5}{43} \approx 1,48$$

Der ermittelte Einfallsort ist demnach (1,83|1,48).

Frage 11**(4 Punkte)**

In der Vorlesung wurden die beiden nuklearmedizinischen Bildgebungsverfahren PET und SPECT vorgestellt. Vergleichen Sie die beiden Verfahren im Hinblick auf:

- Sensitivität (d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Zerfallsereignis detektiert),
- verwendete Tracer und deren Eigenschaften (Halbwertszeit),
- Signal-zu-Rausch-Verhältnis sowie
- räumliche Auflösung.

Lösung:

- **Sensitivität:** Da bei PET keine Kollimatoren benötigt werden liegt die Sensitivität ca. 100x höher als bei SPECT. Dadurch ergibt sich ein günstigeres SNR und die Scanzeit kann verkürzt werden.
- **Tracer:** PET Radionuklide weisen eine kürzere Halbwertszeit auf. Dadurch kann bei gleicher Gesamtdosis eine höhere Anfangsaktivität verabreicht werden. Der langsamere Zerfall der SPECT Radionuklide eignet sich hingegen, um dynamische Prozesse über Stunden oder Tage abzubilden.
- **SNR:** Das SNR ist bei PET in der Regel besser (höhere Sensitivität, größere Aktivität).
- **Räumliche Auflösung:** Ist bei SPECT schlechter als bei PET. Bei SPECT nimmt die Breite der Point Spread Function mit dem Abstand zu.